س: كثيرات الحدود البوليانية - مجموع الجداءات القانوني:

لتكن لدينا مجموعة من المتحولات (الحروف أو الرموز) $x_1, \ldots, x_n$
نعني بكثير حدود بولياني E في هذه المتحولات ونكتب $E(x_1, \ldots, x_n)$
أي متغير أو أي تعبير مكون من المتحولات السابقة باستخدام العمليات
على جبر بول وهي ($+ , \cdot , '$)
على سبيل المثال:

$$F = ((xy'z' + y)' + x'z)'$$

$$E = (x + y'z)' + (xyz' + x'y)'$$

إن تعابير بوليانية في المتغيرات z, y, x .
الحرف هو متغير أو متمم المتغير مثلاً x و x' ، y و y' بمعنى آخر أي وحيد الحد
نعني بحاصل الضرب الأساسي حاصل ضرب حرفين أو أكثر بحيث لا يحتوي حرفان على نفس المتغير مثلاً:

$$x'yz \;,\; xyz \;,\; xy'z \;,\; xy$$

كلها حواصل ضرب أساسية.

$$xyz = xyzx \quad , \quad xyzy' = 0$$

إن كثير الحدود البولياني هو مجموع جداءات لحواصل ضرب أساسية أي أنه تعبير آخر
أن أي حاصل ضرب بولياني يمكن اختزاله إلى صفر أو حاصل ضرب أساسي:
يقال أن كثيرة حدود بوليانية E في صورة مجموع حواصل ضرب أو صورة أقل حدود إذا كانت E حاصل ضرب أساسي أو مجموع اثنين أو أكثر من حواصل الضرب الأساسية مثلاً:

$$E_1 = xz' + y'z + xyz'$$

والخلاصة أن أي كثيرة حدود بوليانية (تعبير بولياني) غير صفرية يمكن وضعها في صورة مجموع جداءات بالطريقة التالية:

أ - باستخدام قوانين دي مورجان ونفي النفي.
ب - باستخدام قوانين التوزيع في جبر بول.
٣ - باستخدام قوانين خواص التبادل - اللانمو - المتمم يمكننا تحويل كل حاصل ضرب في E إلى حاصل ضرب اساسي واخيرا باستخدام قوانين الامتصاص يمكننا وضع E في صورة حاصل مجموع حواصل ضرب:

مثال: لتكن لدينا الدالة:

$$F=(ab+c')(ac'+bc)$$
$$=abc'+abc+ac'$$
$$=ab+ac'$$

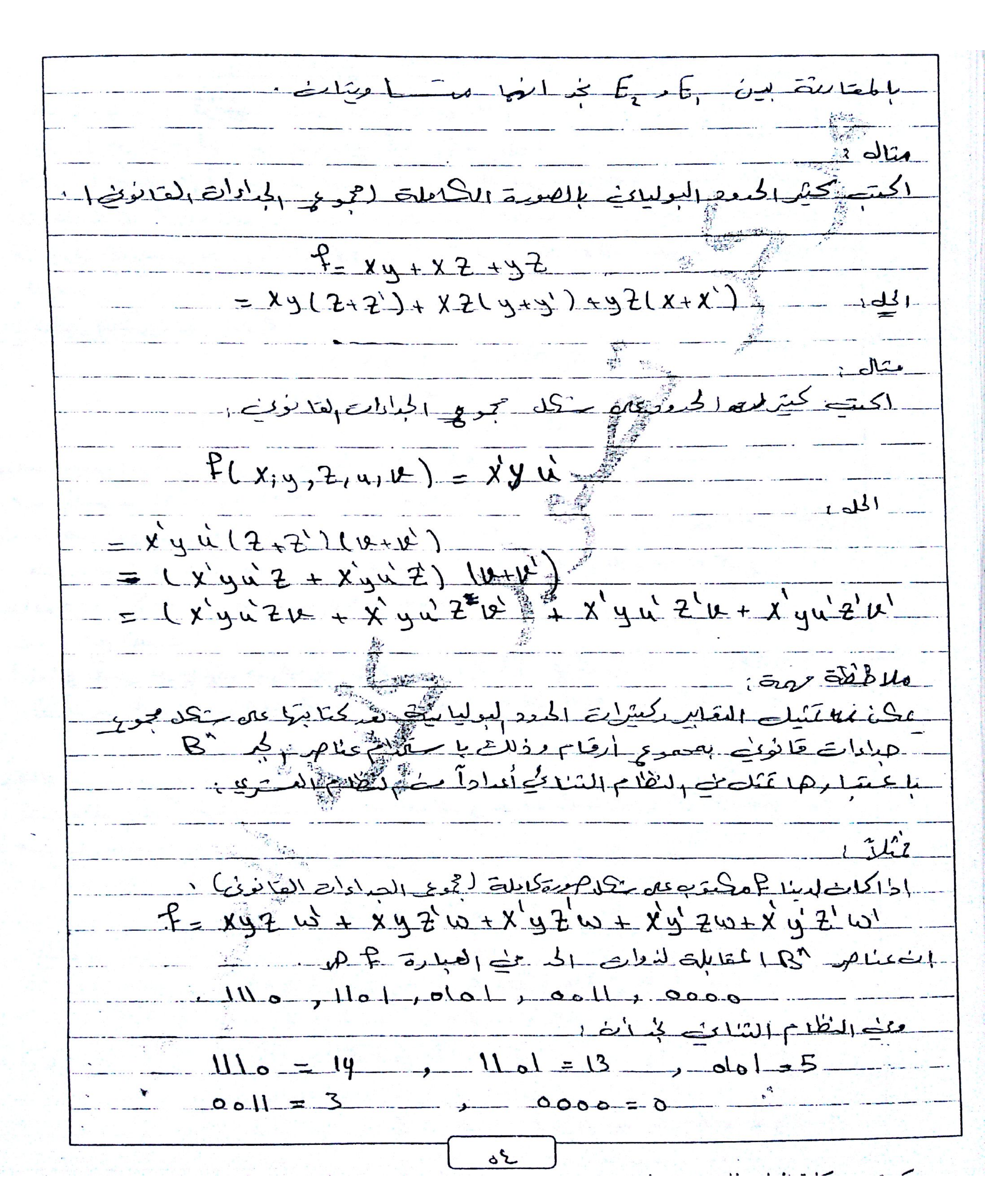
* متى يقال أن كثيرة الحدود البوليانية $E(x_1,\ldots,x_n)$ (غير الصفرية) في الصورة الكاملة (على شكل مجموع جداءات قانونية):
كل حاصل ضرب يحتوي جميع المتغيرات كانت اي كثيرة حدود بوليانية (تعبير البولياني) يمكن وضعه في الصورة الكاملة لمجموع حواصل ضرب (على شكل مجموع جداءات قانونية) كما في الملاحظة التالية:
ملاحظة:
أن اي تعبير بولياني غير صفري $E(x_1,\ldots,x_n)$ يمكن وضعه في الصورة الكاملة لمجموع حواصل ضرب (شكل قانوني) وهذا التمثيل وحيد.

مثال:
اكتب كلا من كثيرتي الحدود على شكل مجموع جداءات قانونية ثم استنتج انهما متساويتان:

$$E_1=xy+y'z'$$
$$E_2=xy+xz'+y'z'$$

الحل:

$$E_1=xy(z+z')+y'z'(x+x')$$
$$=xyz+xyz'+xy'z'+x'y'z'$$
$$E_2=xy(z+z')+xz'(y+y')+y'z'(x+x')$$
$$=xyz+xyz'+xy'z'+x'y'z'$$



بالمقارنة بين E_1 و E_2 نجد انهما متساويتان.

مثال:

اكتب كثير الحدود البوليانية بالصورة الكاملة (مجموع الجداءات القانونية):

$$f = xy + xz + yz$$

الحل:

$$= xy(z+z') + xz(y+y') + yz(x+x')$$

مثال:

اكتب كثيرة الحدود على شكل مجموع الجداءات القانونية:

$$f(x,y,z,u,v) = x'yu'$$

الحل:

$$= x'yu'(z+z')(v+v')$$

$$= (x'yu'z + x'yu'z')(v+v')$$

$$= (x'yu'zv + x'yu'zv' + x'yu'z'v + x'yu'z'v'$$

ملاحظة مهمة:

يمكن تمثيل المقابلة لكثيرات الحدود البوليانية بعد كتابتها على شكل مجموع جداءات قانونية بمجموع أرقام وذلك باستخدام عناصر B^n باعتبارها تمثل في النظام الثنائي أعداداً من النظام العشري:

مثال:

اذا كانت لدينا f مكتوبة على شكل صورة كاملة (مجموع الجداءات القانونية):

$$f = xyzw' + xyz'w + x'yz'w + x'y'zw + x'y'z'w'$$

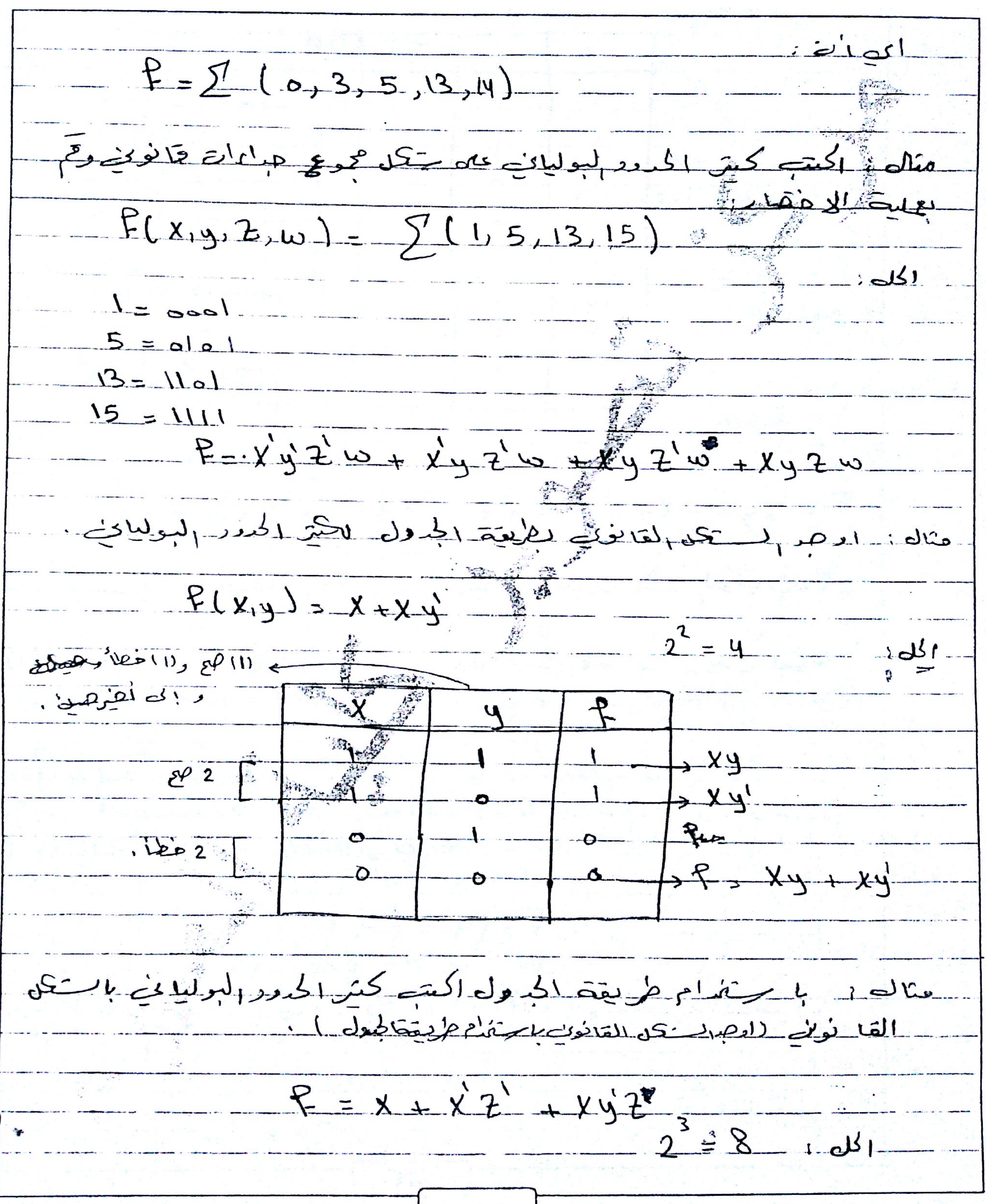
العناصر B^n المقابلة للدوال الحد في العبارة f هي

1110 , 1101 , 0101 , 0011 , 0000

ومن النظام الثنائي نجد أن:

1110 = 14 , 1101 = 13 , 0101 = 5

0011 = 3 , 0000 = 0



الجواب:

$$F = \sum (0, 3, 5, 13, 14)$$

مثال: اكتب كثير الحدود البولياني على شكل مجموع جداءات قانونية وقم بعملية الاختصار:

$$F(x, y, z, w) = \sum (1, 5, 13, 15)$$

الحل:

1 = 0001
5 = 0101
13 = 1101
15 = 1111

$$F = x'y'z'w + x'yz'w + xyz'w + xyzw$$

مثال: اوجد الشكل القانوني بطريقة الجدول لكثير الحدود البولياني.

$$F(x, y) = x + xy'$$

الحل: $2^2 = 4$

(1) صح و (0) خطأ [illegible] وإلى أفترضتها.

x	y	f	
1	1	1	→ xy
1	0	1	→ xy'
0	1	0	
0	0	0	→ $F = xy + xy'$

2 صح
2 خطأ.

مثال: باستخدام طريقة الجدول اكتب كثير الحدود البولياني بالشكل القانوني (اوجد الشكل القانوني باستخدام طريقة الجدول).

$$F = x + x'z' + xy'z$$

الحل: $2^3 = 8$

x	y	z	F	
1	1	1	1	→ xyz +
1	1	0	1	→ xyz' +
1	0	1	1	→ $xy'z$ +
1	0	0	1	→ $xy'z'$
0	1	1	0	
0	1	0	1	→ $x'yz'$ +
0	0	1	0	
0	0	0	1	→ $x'y'z'$

وبذلك :

$$F = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$$

تبسيط واختصار التعابير البوليانية (كثيرات الحدود البوليانية).

تعريف (1) : لتكن F و G كثيرتي حدود بوليانيتين متساويتين نقول أن F مبسطة أو مختصرة أكثر من G إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

1- إذا كان عدد ذوات الحد في F أقل من عدد ذوات الحد في G.

2- إذا تساوى عدد ذوات الحد في كل من F و G فإن عدد المتغيرات ومتمماتها في F أقل من عدد المتغيرات ومتمماتها في G.

مثال :

$$F = pq + p'q'r$$

$$G = pqr + pqr' + p'q'r'$$

متساويان لكن F أبسط من G (أي أقل منها بعدد ذوات الحد)

مثال :

$F = p + q$

$G = p + p'q$

F, G متساويتان

لكن F مبسطة أكثر من G .

تعريف 2 :

نقول أن عبارة كثيرة الحدود البوليانية أصغرية إذا كان لا يوجد عبارة لـ F مبسطة أو مختصرة أكثر منها .

* طريقة مخططات كارنو في اختصار وتبسيط كثيرات الحدود البوليانية :

إن مخططات كارنو كطريقة لاختصار التعابير وكثيرات الحدود البوليانية مفيدة في الحالات التي يكون فيها عدد المتغيرات لا يتجاوز (4) متغيرات . أما إذا كان الهدف الأساسي هو إيجاد صيغة بسيطة للدالة البوليانية فهناك ثلاث طرائق لإنجاز ذلك وهي :

1- طريقة كوين مكلوسكي

2- طريقة الإجماع

3- طريقة مخططات كارنو

إن كل من الطريقتين الأولى والثانية يمكن استخدامها للتبسيط إلى دالة بوليانية مهما كان عدد المتغيرات ويمكن برمجتها واستخدام الحاسوب لتنفيذها إلا أنها صعبة الوصف أما طريقة مخططات كارنو فهي سهلة الوصف للدوال ذات المتغيرات الثلاث متغيرات أو أربع متغيرات فهي سوف نستخدمها في هذا البند أولاً :

* استخدام مخططات كارنو للتبسيط الدالة البوليانية :

نكتب الدالة البوليانية في شكل مجموع لجداءات قانونية ثم نقوم بعمل أو رسم مخطط كارنو لكثيرة الحدود البوليانية التي عدد متغيراتها n حيث $n \le 4$ وهذا المخطط هو عبارة عن جدول على شكل شبكة مكونة من 2^n مربعاً صغيراً .

مثال : متغيرين $2^2 = 4$

فإن مخطط كارنو يأخذ الشكل :

	q	q'
p		
p'		

(مخطط كارنو لمتغيرين)

مثال :

مخطط كارنو لثلاث متغيرات $2^3 = 8$

	qr	qr'	q'r'	q'r
p				
p'				

مثال : مخطط كارنو لاربع متغيرات $2^4 = 16$

	rt	rt'	r't'	r't
pq				
pq'				
p'q'				
p'q				

تعريف مهم :

إذا كان r مستطيل في مخطط كارنو لدالة ما فإننا نقول أن r هو مستطيل اساسي إذا كان r من أحد الأنواع الآتية :

1x1 , 1x2 , 2x1 , 2x2 , 1x4 , 4x1 , 2x4 , 4x2 , 4x4

والمستطيل الأساسي يكون أساسياً إذا لم يوجد مستطيل اساسي يحتويه وفيما يلي خوارزمية لاستخدام مخططات كارنو لكثيرة حدود ذات اربعة متغيرات أو أقل من اجل ايجاد العبارة الأصغرية نتبع ما يلي (مقبولات) :

١- نطوق كل واحد معزول (الذي لا يوجد له جوار).

٢- نوجد كل واحد بجوار واحد آخر ونطوقه مع جاره الوحيد.

٣- نوجد كل مستطيل مكون من أربعة مربعات متجاورة. ونطوق المربعات الأربعة إذا كان بين هذه المربعات واحد على الأقل لم يطوق بعد أما إذا كانت جميع مربعات المستطيل قد طوقت من قبل مع مجاوراتها فلا حاجة لنا لتطويق المستطيل.

٤- كل مستطيل مكون من 8 مربعات تحوي الواحد متجاورة ونطوق مربعات هذا المستطيل إذا كان بين مربعاته واحد على الأقل لم يطوق بعد.

٥- نطوق كل مربع مكون من الواحد بحيث مع أكبر مستطيل ممكن من 2 أو 4 أو 8 مربعات ينتمي اليه ذلك المربع ونتوقف عندما يكون كل مربع مكون من الواحد في المخطط قد طوق.

٦- لكل منطقة مطوقة نشكل جداء العناصر المشتركة للذوات الحد المقابلة لمربعات هذه المنطقة ثم نأخذ المجموع البولياني لهذه الجداءات فنحصل على العبارة الأصغرية لكثيرة الحدود وهي Msp(f)

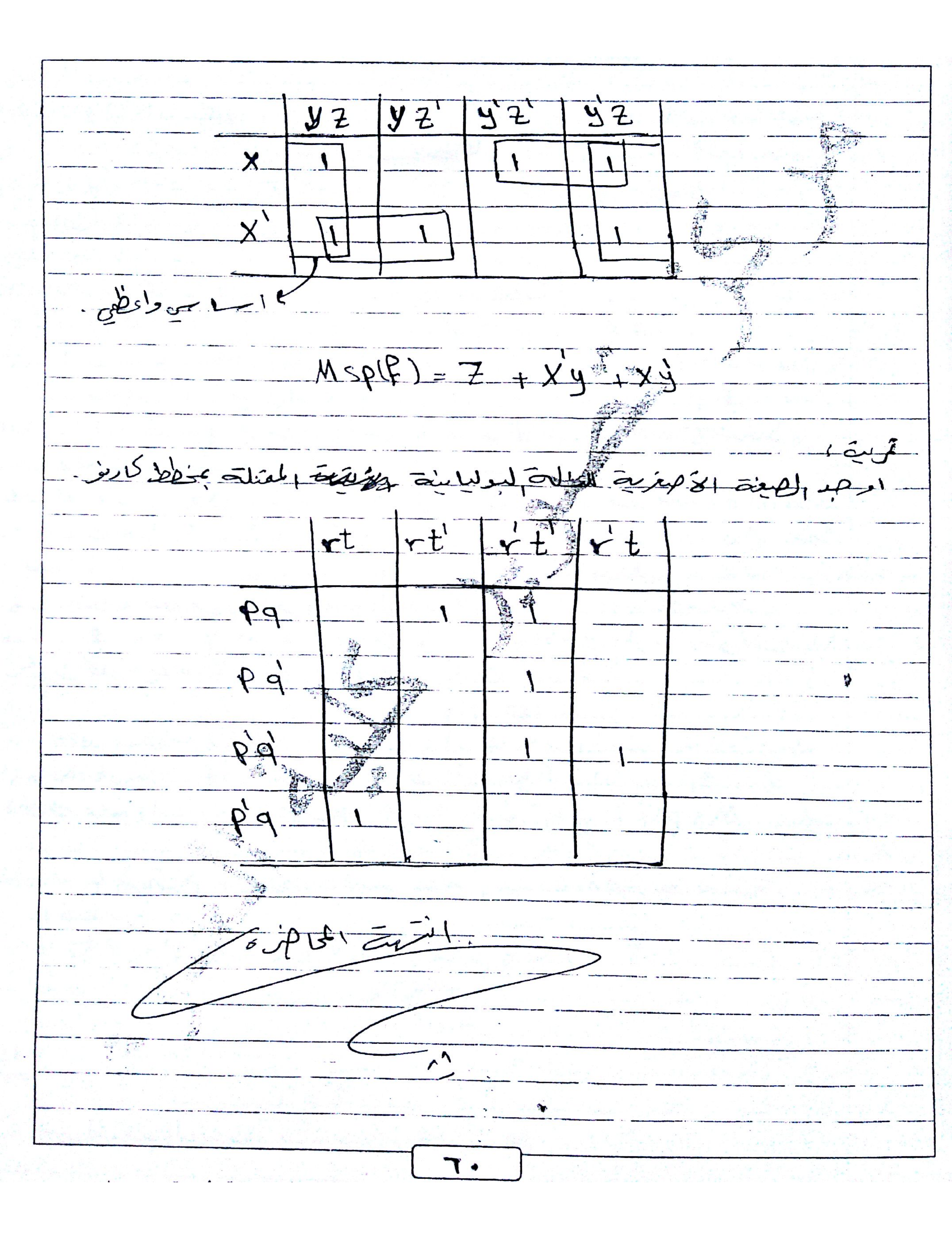
مثال: باستخدام مخططات كارنو أوجد العبارة الأصغرية لكثيرة الحدود:

$$f = xyz + x'yz + x'yz' + xy'z' + xy'z + x'y'z$$

الحل:

$$2^3 = 8$$

∴ كثيرة الحدود البوليانية مكتوبة بالصورة الكاملة.



	yz	yz'	y'z'	y'z
x	1		1	1
x'	1	1		1

اساسي واطي.

$$Msp(f) = Z + x'y + xy'$$

تمرين :

اوجد الصيغة الاصغرية للدالة البوليانية الممثلة بمخطط كارنو.

	rt	rt'	r't'	r't
pq		1	1	
pq'			1	
p'q'			1	1
p'q	1			